**№8-дәріс. Бірінші және екінші тамаша шектер.**

### Бірінші тамаша шек. Құрамында тригонометриялық функциялар бар өрнектердің шектерін есептегенде бірінші тамаша шекті қолданады: . *Дәлелдеу:* Радиусы бірге тең шеңбер аламыз. , сонда:

 , мұндағы

Y

X

*x*

A

C

K

B

 

 

 

 

***1-мысал. ***

***2-мысал.*** .

### Екінші тамаша шек: .

Мұндағы е **≈** 2,718282… – иррационал сан.

***3-мысал.*** Шекті есептеу керек



Шексіз аздарды салыстыру. Екі шексіз аз шамаларды салыстыру үшін олардың қатынасын қарастырады. *-* ш.а.ш. болсын, яғни  және .

1. Егер **болса, онда  ұмтылғанда ** ш.а.ш.-ның аздық реттері бірдей дейді.

2. Егер ** болса, онда ** ұмтылғанда ** шексіз аз шамалар эквивалентті деп аталады және *~ * деп белгіленеді.

**Мысал.**  шексіз аздар  ұмтылғанда эквивалентті, бұл бірінші тамаша шектің қасиетінен шығады.

***Теорема.*** ** ұмтылғанда ** ш.а. болсын, онда:

1. ; 2. ~ ;

3.  ~ ; 4.  ~ ;

5.  ~ ; 6.  ~ , ;

***Теорема.*** Егер ш.а.ф. –ды оларға эквивалентті функциялармен алмастырса, онда екі ш.а.ф. қатынасының шегі өзгермейді.

***4-мысал.*** ,

себебi, ~~ ~~.

**Функцияның үзіліссіздігі.** Функцияның нүктедегі үзіліссіздігі ұғымын беру үшін 3 шартты келтіреміз:

1.  функциясы  нүктесінде анықталған (яғни  мәні бар);

2.  ( шамасы -ге ұмтылғанда) болғанда  функциясының ақырлы шегі  бар;

3.  шегі функцияның  нүктесіндегі мәніне тең: 

***1−анықтама.*** Егер  функциясы келтірілген үш шартты қанағаттандырса, онда оны  нүктесінде үзіліссіз дейді. Функцияның  нүктесіндегі үзіліссіздігінің анықтамасының формуласын былай жазуға болады:  Функция  нүктесінде үзіліссіз болса, онда оның графигін  нүктесі арқылы үзіліссіз сызуға (қарындашты қағаздан алмай) болады. Енді үзіліссіздіктің екінші анықтамасын берейік.  аргументіне  өсімшесін берсек,  функциясы  өсімшесін алады. Ол  формуласымен анықталады.

***2−анықтама.*** Егер  функциясы  нүктесінде анықталса және  теңдігі орындалса, онда ол функцияны  нүктесінде үзіліссіз дейді. Үзіліссіздіктің осы екі анықтамасы өзара эквивалентті. Егер функциясы  нүктесінде үзіліссіз болмаса, онда бұл нүкте  функциясының үзіліс нүктесі деп аталады. Үзіліс нүктесінің екі түрі бар. Егер  функциясың  нүктесінде оң жақты және сол жақты шектері бар болып, бірақ олар өзара тең болмаса, онда  нүктесі  функциясының ***бірінші*** ***текті үзіліс нүктесі*** деп аталады. Егер оң жақты және сол жақты шектердің ең болмағанда біреуі не шексіздікке тең болып, не жоқ болса, онда  нүктесі  функциясының ***екінші*** ***текті үзіліс нүктесі*** деп аталады. Егер  нүктесінде ақырлы оң жақты және сол жақты шектер бар болып, бірақ олар осы нүктедегі функцияның мәніне тең болмаса, онда  нүктесі  функциясының ***түзетілетін үзіліс нүктесі*** деп аталады.

***5-мысал.***  функциясы үшін  нүктесі екінші текті үзіліс нүктесі болады, себебі



Y

O

1

Егер  функциясы  аралығының әрбір нүктесінде үзіліссіз болса, онда оны *** аралығында үзіліссіз*** дейді. Егер  функциясы  аралығында үзіліссіз болып, ал  нүктесінде оң жақтан (яғни ), ал  нүктесінде сол жақтан (яғни ) үзіліссіз болса, онда  функциясын *** кесіндісінде үзіліссіз*** дейді.

## Kесіндіде үзіліссіз функциялардың қасиеттері

1. Егер  функциясы  кесіндісінде үзіліссіз болса, онда ол осы кесіндіде ақырлы (шенелген)

2. **Вейерштрасс теоремасы** Егер  функциясы  кесіндісінде үзіліссіз болса, онда ол осы кесіндіде өзінің ең кіші және ең үлкен мәндерін қабылдайды.

3. **Больцано-Коши теоремасы** Егер  функциясы  кесіндісінде үзіліссіз және және ,  нүктелеріндегі мәндері әртүрлі таңбалар қабылдаса (), онда  теңдігі орындалатындай  кесіндісінің ең болмағанда  бір нүктесі бар.

**Әдебиеттер:** 1 нег.[159-162], [164-169], [191-211], 11 қос. [335-358].

***Бақылау сұрақтар:***

1. Бірінші тамаша шек.

2. е санының анықтамасын келтіріңіз (екінші тамаша шек).

3. Функцияның нүктедегі үзіліссіздігінің анықтамасын беріңіз.

4. Қандай нүктелер функцияның үзіліс нүктелері деп аталады?